幾何学的トポロジーの最近の話題 (集合論的・幾何学的トポロジーとその応用の研究)

AUTHOR(S):

小山, 晃

数理解析研究所講究録
1188 巻 2001 年 26-45

幾何学的トポロジーの最近の話題

大阪教育大学　小山　晃　(Akira Koyama)
Department of Mathematical Sciences, Osaka Kyoiku University

‘幾何学的トポロジーの最近の話題’という大それたタイトルで話をしましたが, 実際にはその中で自分自身おもしろいと思ったもの, 興味を持っていることの中からいくつかを選んで概略を話したものです. これはその時に配ったアブストラクトに (§ 2,§ 3 について) 少しだけ加筆をしてそれらの様子を説明しようとしたものです. これらの話題・問題に参加してくれる人が少しでも増えれば成功です.

1 Shape Theory – old problems and new solutions

１９６０年代後半に Borsuk によって shape 理論が導入されて以来, 最も基本的でありながら最も難しい問題の一つは ‘stability’, ちょっと荒っぽい言い方をすると, ‘ bad な’ 空間が, いつ, ‘good な’ 空間の shape を持つか？’ という問題に関してであった. もう少し正確には：

Problem 1. Give necessary and sufficient conditions for a connected finite-dimensional compactum X to have the pointed shape of a CW-complex.

Problem 2. Give necessary and sufficient conditions for a connected finite-dimensional compactum X to have the pointed shape of a a finite CW-complex.

というものであるが, これらの問題は７０年代になり, D. A. Edwards and R. Geoghegan はいくつかの論文を経て, [Ed-Ge] によって最終的な解決を得た. すなわち：

Problem 1 について: X has the pointed shape of a CW-complex if and only if each of its pro-homotopy groups is stable.

Problem 2 について: X has the pointed shape of a a finite CW-complex if and only each of its pro-homotopy groups is stable and its Wall obstruction $\omega(X,x) \in \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\check{\pi}_1(X,x)])$ vanishes.

Wall finiteness obstruction が出てきた背景について少し書いてみよう.

定義 1.1. 位相空間 X が *finitely dominated* であるとは, *finite CW-complex* P と *maps* $f : X \to P, g : P \to X$ *s.t.* $g \circ f = id_X$ が存在することである.

例えば,compact ANR X は finitely dominated であり, 特に,compact 位相多様体は finitely dominated である. 'compact ANR は finite CW-complex と homotopy equivalent と成り得るか?' は Borsuk の問題であった. この問題は West [We] によって肯定的に解かれている. また, 'finitely dominated された空間は finite CW-complex と homotopy equivalent と成り得るか?' は J. H. C. Whitehead によって定式化された問題として知られている. Milnor [M] は, finitely dominated された空間は CW-complex と homotopy equivalent と成ることを示したので, 問題は, 'finitely dominated された CW-complex は finite CW-complex と homotopy equivalent と成り得るか?' に置き換えることができる. さらに,Milnor [M] 自身, 'この問題はおもしろいだろうが, とても難しいだろう' とも言っている. この問題について,Wall [Wa] は, 今日 'Wall's finiteness obstruction' と呼ばれている 'finitely dominated CW-complex が finite CW-complex と homotopy equivalent に成り得るかを決定する' algebraic K-theory invariant を導入して解決を計った. すなわち:

定理 1.1. *A finitely dominated space X has a finiteness obstruction*

$$\sigma(X) \in \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(X,x)])$$

such that $\sigma(X) = 0$ if and only if X is homotopy equivalent to a finite CW-complex.

一方,compactum X が CW-complex の shape を持つ必要十分条件は X が finite CW-complex に shape dominate される, (i.e. finite CW-complex

P と shape morphisms $\mathbf{f} : X \to P, \mathbf{g} : P \to X$ s.t. $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} = \mathbf{id}_X$: が存在する）である．よって, shape 理論が ‘ bad な’ 空間に関するホモトピー論と考えていることと併せて, Edwards-Geoghegan による Problem2 の解は Wall's finiteness obstruction thoery の ‘ bad な’ 空間への自然な進展と考えていることが理解できるだろう．

Wall の論文 [Wa] は非常にすばらしいアイディアから成り, 後々にも大きな影響を与えた．しかし, 一方では非常に難解な論文としても知られていて, よりホモトピー論的な立場からの解説としては, [Va], [Mi], ちょっと幾何的な立場からでは [Fe_2], [Fe-Ra] などがある．

Geoghegan [Ge] は Problem1 の elementary proof を与えているが, ここでは, その基本的アイディアを継承しながら Problem2 の elementary proof (理解可能な証明？) を与えた Guilbault [Gu] の最近の仕事を紹介する．実際, the category towers of finite CW-complexes に対して Wall's finiteness obstruction を定義していく．最初に, Wall の補題の証明をうまく適用するために, [Fe_1] の方法を使って towers of finite CW-complexes の再構成の方法を示す．

補題 1.1. *Let $\{K_i, f_i\}$ be a tower of finite complexes such that pro-$\pi_k(\{K_i, f_i\})$, $k \leq n$, are stable and pro-$\pi_{n+1}(\{K_i, f_i\})$ satisfies the Mittag-Leffler condition. Then there exists a tower $\{L_i, g_i\}$ of finite complexes equivalent to $\{K_i, f_i\}$ such that each g_i is $(n+1)$-connected.*

Moreover, passing to a subsequence of $\{K_i, f_i\}$ and relabeling (if necessary), we may assume that

(1) *each L_i is obtaining from K_i by inductively attaching finitely many k-cells for $2 \leq k \leq n+2$,*

(2) *each $g_i$is an extension of f_i such that $g_i(K_i \cup$(new cells of dimension $\leq k$)) $\subset K_{i-1} \cup$(new cells of dimension $\leq k-1$)).*

さらに, [Fe_2], [Fe-Ra] による infinite telescopes のアイディアを用いて次の結果を示していく：

定理 1.2. *Let $\{K_i, f_i\}$ be a tower of finite CW-complexes. Suppose that $\sup\{\dim K_i\} < \infty$ and pro-$\pi_k(\{K_i, f_i\})$ are stable for all k. Then there is a well-defined obstruction $\omega(\{K_i, f_i\}) \in \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\check{\pi}_1(\{K_i, f_i\})])$ which vanishes if and only if $\{K_i, f_i\}$ is stable.*

定理 1.3. *Let G be a finitely presented group and P a finitely generated projective $\mathbb{Z}[G]$ modules. Then there exists a tower of finite, 2-dimensional complexes $\{K_i, f_i\}$ such that*

(1) *pro-$\pi_k(\{K_i, f_i\})$ are stable for all k,*

(2) $\check{\pi}_1(\{K_i, f_i\}) \cong G$, *and*

(3) $\omega(\{K_i, f_i\}) = [P] \in \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[G])$.

参考文献

[Ed-Ge] D. A. Edwards and R. Geoghegan, *Shape of complexes, ends of manifolds, homotopy limits and the Wall obstruction*, Ann. Math. **101**(1975), 261–277.

[Fe_1] S. Ferry, *A stable converse to the Vietoris-Smale theorem with applications in shape theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **261**(1980), 369–386.

[Fe_2] ____, *A simple homotopy approach to the finiteness obstruction*, Dubrovnik 1981, Lecture Notes in Math. vol.870, 1981, pp.73–81.

[Fe-Ra] ____ and A. Ranicki, *A survey of Wall's finiteness obstruction*, preprint.

[Ge] R. Geoghegan, *Elementary proofs of stability theorems in pro-homotopy and shape*, General Topology and its Appl. **8**(1978), 265–281.

[Gu] C. R. Guilbault, *Compacta with shapes of finite complexes: A direct approach to the Edwards-Geoghegan-Wall obstruction*, preprint.

[M] J. Milnor, *On spaces having the homotopy type of a CW-complex*, Trans. Amer. Math. **90**(1959), 272–280.

[Mi] G. Mislin, *Wall's finite obtruction*, Handbook of algebraic topology, Elsevier, 1995, pp.1259–1291.

[Va] K. Varadarajan, *The finiteness obstruction of C. T. C. Wall*, J. Wiley, 1989.

[Wa] C. T. C. Wall, *Finiteness conditions for CW-complexes*, Ann. Math. **81**(1965), 55–69.

[We] J. West, *Mapping of Hilbert cube manifolds to ANR's: A solution of a conjecture of Borsuk*, Ann. of Math. **106**(1977), 1–18.

2 Extension dimension and cohomological dimension

定義, 結果など一般的に考えることができるものもあるが, '空間' は特に断らない限り**距離空間**を考えているとする. 最初に, これまでの次元・コホモロジー次元の概念を統一的に考えた extension dimension の概念を定義しておく:

定義 2.1. 空間 X と CW-complex K について, $\text{e-dim}\, X \le K$ であるとは, 任意の閉部分集合 $A \subset X$ と連続写像 $f : A \to K$ に対して,

$$\text{連続写像 } \tilde{f} : X \to K \quad s.\,t. \quad \tilde{f}_A = f$$

が存在することをいう.

よく知られた次元・コホモロジー次元の特徴付けから,

(i) $\text{e-dim}\, X \le S^n \Longleftrightarrow \dim X \le n$,

(ii) $\text{e-dim}\, X \le K(G,n) \Longleftrightarrow \dim_G X \le n$.

CW-complexes K, L について, $K \le L$ であるとは, compact 空間 X に関して, $\text{e-dim}\, X \le K$ ならば $\text{e-dim}\, X \le L$ であることをいう. $\le$ から導かれる同値関係 $\sim$: すなわち $K \sim L$ であるとは

compact 空間 X に関して, $\text{e-dim}\, X \le K \Longleftrightarrow \text{e-dim}\, Y \le L$,

による K の同値類を *extension type* of K といい, $[K]$ と表す. さらに,

$$[K] \le [L] \Longleftrightarrow K \le L$$

によって extension type に順序を導入することができる.

そこで, compact 空間 X の extension dimension を次のように定義する:

$$e\text{-}\dim X = \inf\{[K] \mid X\tau K\}.$$

すなわち, e-dim の概念は, 次元, コホモロジー次元の統一的なアプローチであることである. そこで最近はこの方向からの研究が進んでいる. 現在のところ有力な道具は Dranishnikov [Dr_2] による ' Hurewicz theorem in cohomological dimension theory' と呼ばれる次の定理である:

定理 2.1. 有限次元 *compact* 距離空間 X と *simple complex* K について次は同値である：

(1) $X\tau K$,

(2) $X\tau SP^\infty K$,

(3) $\dim_{H_i(K)} X \leq i$ *for every* $i \geq 1$,

(4) $\dim_{\pi_i(K)} X \leq i$ *for every* $i \geq 1$.

この結果と証明に注目して Shchepin [Sc] は興味のある概念を導入してきた．しかしこの論文は 100 ページを越す分量があるにもかかわらず (例によって) 結構間違えも多く，読み通すことはとても大変です．Dydak [Dy] はこのアプローチに着目して，改良を加えおもしろい結果を発表している．

定理 2.2. *Suppose that* L *is a connected CW-complex and* $n \geq 0$.

(1) *If* $\Sigma^n(SP^\infty(L))$ *has the extension type of a countable, finite-dimensional and nontrivial CW-complex, then either* $SP^\infty(L) \sim K(\mathbb{Z}_{(\ell)}, 1)$ *or* $SP^\infty(L) \sim K(\mathbb{Q}, m)$ *for some* $m \geq 1$.

(2) *If* $\Sigma^n(SP^\infty(L))$ *has the extension type of a compact CW-complex, then either* $SP^\infty(L) \sim S^1$

これは，これまで以下のような知られている結果を包括したものとなっている：

1. S^n and $K(\mathbb{Z}, n)$ are of different extension type for $n \geq 3$ (Dranishnikov [Dr_1]).

2. S^n and $K(\mathbb{Z}, n)$ are of different extension type for $n \geq 2$ (Dydak-Walsh [Dy-Wa]).

3. $M(\mathbb{Z}_p, n)$ and $K(\mathbb{Z}_p, n)$ are of different extension types for $n \geq 1$ (Miyata [Mi]).

4. $M(\mathbb{Z}_2, 1)$ and $K(\mathbb{Z}_2, 1)$ are of different extension types for $n \geq 1$ (Levin [Le]).

5. RP^n and RP^∞ are of different extension types for $n \geq 1$ (Dranishnikov-Repovs [Dr-Re]) .

Hurewicz theorem in cohomological dimension theory の証明など最近の cohomological dimension theory では localization theory を本質的に使う機会が増えてきている. コホモロジー次元論の考え方から次元論に localization theory を応用してみようと試みたものに [Yo] がある. そこで次のことが示されている :

定理 2.3. *Suppose that X is a finite-dimensional compactum and K is a simple complex. Then the followings are equivalent:*

(1) *e-dim $X \leq K$, and*

(2) *e-dim $X \leq K_{(p)}$ for all prime numbers p.*

この結果はホモトピー論の localization 理論の結果とうまく対応している. また, Hurewicz theorem in cohomological dimension theory の強力さをフルに活用するために, extension dimension theory を simple CW-complexes だけに制限して考えることも１つの方法だろう.

そこで上述の定義をすべて simple CW-complexes だけに制限して得られる compact 空間 X に対する定義を

$$e^*\text{-}\dim X$$

と表すことにする. この時, 定理 2.3 は次のように表現できる:

定理 2.4. *compact* 空間 X について,

$$e^*\text{-}\dim X \leq K \iff e^*\text{-}\dim X \leq K_{(p)} \text{ for all prime numbers } p.$$

一方, e-dim X にしても e^*-dim X にしても, 等号の方は何を意味するかなかなか難しい. 例えば一番単純そうな S^n にしても次のようなことが成り立ってしまう.

定理 2.5. *compact* 空間 X について,

$$e^*\text{-}\dim X = [S^n] \iff \dim_G X = n \text{ for all abelian group } G \neq 0$$

すなわち X は *dimension full-valued* である

さらに基本的にも思えることもあまりわかっていないことが現状であろう. 例えば:

問題 2.1. 任意の可算 *CW-complexK* に対して, e^*-dim $X = [K]$ である *compact* 距離空間 X が存在するか?

定理 2.5 に対応しては

問題 2.2. *compact* 距離空間 X について, e^*-dim $X = [K(G, n)]$ は何を意味するか?
　特に $\mathbb{Z}$ の場合は?

　等号にこだわった理由をちょっと説明してみよう. 最近 Dydak らとの共同研究 [Dy-Ko],[Boe-Dy-Ji-Ko-Sc] で次のような Borsuk-Sieklucki Theorem のコホモロジー次元版を考察してきた.

定理 2.6. *Let X be a compact ANR and let G be an abelian group. Let $\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$ be a pairwise disjoint family of closed subsets of X. If $\dim_G X = n = \dim_G K_\alpha$ for all $\alpha \in A$, then A must be countable.*

証明は principal ideal domain 上の有限生成加群の基本定理, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ のもつ性質 'Descending chain condition' を用いて代数的トポロジーの手法を駆使した. しかし, この結果の extension dimension 版がどうにかできないか? という素朴な疑問が出てくる. その時の最初の一歩として '等号' をどのように理解するかが問題になる. まだ端緒もつかめていないがおもしろい性質・結果が得られたらいいと思っている. 実際, 次の問題が動機だったのです.

問題 2.3. *Let X be a compact ANR and let K be a countable CW-complex. Let $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ be a pairwise disjoint family of closed subsets of X. If e^*-$\dim X = [K] = e^*$-$\dim X_\alpha$ for all $\alpha \in A$, then must A be countable?*

参考文献

[Boe-Dy-Ji-Ko-Sc] M. Boege, J. Dydak, R. Jiménez, A/ Koyama and E. V. Scchepin, *IBorsuk-Sieklucki theorem in cohomological dimension theory*, preprint(2000).

[Dr_1] A. N. Dranishnikov, *On a problem of P. S. Alexandroff*, Math. Sbornik, **63:2**(1988), 412–426.

[Dr_2] ____, *Extension of maps into CW-complexes*, Math. Sbornik, **74:9**(1991), 1300–1310.

[Dr-Dy] ____ and J. Dydak, *Extension dimension and extension types*, Proc. Steklov Institute of Math. **212**(1996), 55–88.

[Dr-Re] ____ and D. Repovs, *On Alexandroff theorem for general abelian groups*, Topology and its Appl. to appear.

[Dy] J. Dydak, *Geometry and algebra of dimension theory*, preprint(1999).

[Dy-Ko] ____ and A. Koyama, *Cohomological dimension of locally connected compacta*, Topology and its Appl. (to appear).

[Dy-Wa] ____ and J. Walsh, *Infinite dimensonal compacta having cohomological dimension two: An application of the Sullivan Conjecture*, Topology **32**(1993), 93–104.

[Le] M. Levin, *Constructing compacta of different extensional dimensions*, preprint(1999).

[Mi] T. Miyata, *Moore spaces and cohomological dimension*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. to appear.

[Sc] E. V. Scchepin, *Arithmetric of dimension theory*, Russian Math. Surveys, **53:5**(1998), 975–1069.

[Yo] K. Yokoi, *Localization in dimension theory*, Topology and its Appl. **84**(1998), 269-281.

3 Topics from embedding problems

定理 3.1. *For every n-dimensional metric space X there exists $n+1$ metrizable spaces $X_1, \cdots, X_{n+1}$ of dimension one such that X can be embedded into the (Cartesian) product $X_1 \times \cdots \times X_{n+1}$ (see* [Na_1] *).*

から提出された問題 [Na_2] :

問題 3.1. *Is it true that for every n-dimensional metrizable space X there exists a system $X_1, X_2, \cdots, X_n$ of metrizable spaces of dimension ≤ 1 such that X is homeomorphic to a subset of $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$?*

について考察する. もちろんこの問題は Borsuk [Bo] によって（一般的には）否定的に解決されている. すなわち,

定理 3.2. *The product $X \times Y$ of two one-dimensional compacta X and Y does not contain a copy of the 2-sphere S^2.*

この結果を見直して J. Dydak との共同研究 [Dy-Ko] によって S^2 の様にどんな 2 つの 1 次元 compact 距離空間の積空間に埋め込むことができない空間の条件を代数的に表現した：

定理 3.3. *Let X be an n-dimensional compactum. If there exists an abelian group $G \neq 0$ such that $\check{H}^1(X;G) = 0$ but $\check{H}^n(X;G) \neq G$, then X cannot be embedded into the product of any two one-dimensional compacta.*

この判定法法を適用することによって, 射影平面が, 2 次元球面と同様に, どんな 2 つの 1 次元 compact 距離空間の積空間に埋め込むことができないことがわかった. 最近わかったのだが, Borsuk と我々の間に, W. Kuperberg [Ku] が, ‘ n 次元閉多様体 M について, $\pi_1(M)$ が有限ならば, M はどんな $(n-1)$-次元 compact 距離空間と 1-次元 compact 距離空間の積空間にも埋め込むことができない’ を示していた. よって, 射影平面については知られていた結果であった. しかし, その条件は ‘$\pi_1(M)$ が有限ならば’ は, 一般の compact 距離空間では, 我々のものより強いものであることがわかっている.

最近, J. Krasinkiewicz と S. Spiez との共同研究によって判定条件を改良することができた：

定理 3.4. *Let X be an n-dimensional compactum. If the rank of $\check{H}^1(X)$ is less than n and $\check{H}^n(X) \neq 0$, then X cannot be embedded into the product of n one-dimensional compacta.*

この判定条件によって, 例えば, the Klein bottle がどんな２つの１次元 compact 距離空間の積空間に埋め込むことができないことがわかる.

こうして結果を見ていくと問題が肯定的に解けることは全く考えられないように見える. ところが, どうしてどうして. 結構,n 個の１次元 compact 距離空間の積空間に埋め込むことができる n 次元 compact 距離空間は存在するのです. 例えば, 複雑で何もできそうにない n-dimensional herede-tarily indecoomposable conttinua, これはいつでも n 個の１次元 continua の積空間へ埋め込むことができる [Po] , mod2 の Pontrjagin surface も２つの１次元 continua の積空間へ埋め込むことができる [Ko-Kr-Sp]. 一方, Borsuk の反例（定理 3.2）にもかかわらず, compact 局面について, 次のことがわかる.

(i) S^2 以外の向き付け可能は compact 局面は, ２つのグラフの積空間に埋め込むことができる.

(ii) 境界をもつすべての compact 局面は T 字型と閉区間の積空間に埋め込むことができる.

そう, 球面 S^2 の方が例外なのです.

それでは向き付け不可能な compact 局面はどうか？これまでの判定法法を適用すると, 射影平面,the Klein bottle は２つの１次元 compact 距離空間の積空間へ埋め込むことはできない. さらに全く異なる方法で次のことを示すことができた：

定理 3.5. *A nonorientable compact connected surface M can be embedded into the product of two graphs if and only if the Euler number $\chi(M) \leq -4$.*

証明は以下の２つの補題から成る. 十分性については

Fact. compact 曲面 M が２つのグラフの積空間へ埋め込めるならば, 連結和 $M \sharp T$ も２つのグラフの積空間へ埋め込める.

に注意すると次のことを示せば十分であることがわかる.

補題 3.1. ２つのグラフの積空間へ埋め込める *nonorientable compact connected* 曲面 M でその *Euler character* $\chi(M)$ がそれぞれ -4, -5 であるものが存在する.

compact 曲面の位相型は一意に定まるのだから'存在する'という表現はおかしな感じがするかもしれないが, Euler character $\chi(M)$ がそれぞれ -4, -5 であるものを上手に埋め込むのではなく, 2 つのグラフの積空間へ埋め込める nonorientable compact connected 曲面 M を構成してその Euler character を計算する, という手順で考えるのでこういった表現がフィットすると思う. ちょっと構成を与えておこう:

L を triangulation $\mathcal{T}$ をもつ m 次元多面体, $K_1, K_2, \cdots, K_s$ を $\mathcal{T}$ に関する n 次元部分多面体とする. この時 $K_1, K_2, \cdots, K_s$ の *amalagamated sum* を, 奇数個の $K_1, K_2, \cdots, K_s$ に含まれるすべての n 次元単体の和集合によって定義し,

$$K_1 \sqcup K_2 \sqcup \cdots \sqcup K_s$$

と表す.

補題 3.1 の構成

K_4 を頂点 a, b, c, d をもつ完全グラフとする. 4 つのサークル:

$$S_1 = \overline{ab} \cup \overline{bc} \cup \overline{ca}, \quad S_1' = \overline{ab} \cup \overline{bc} \cup \overline{cd} \cup \overline{da}$$
$$S_2 = \overline{bc} \cup \overline{cd} \cup \overline{db}, \quad S_2' = \overline{ab} \cup \overline{bd} \cup \overline{dc} \cup \overline{ca}\ ,$$

として

$$M_1 = S_1 \times S_1' \quad and \quad M_2 = S_2 \times S_2'\ .$$

さらに

$$M = M_1 \sqcup M_2 \ \subset\ K_4 \times K_4$$

と定義することによって $\chi(M) = -4$ である nonorientable compact connected 曲面 M が得られる.

K を頂点 a, b, c, 重心 v もつ三角形とする. この時 3 つのサークル:

$$S_1 = \overline{va} \cup \overline{ab} \cup \overline{bv}, S_2 = \overline{vb} \cup \overline{bc} \cup \overline{cv}, S_3 = \overline{vc} \cup \overline{ca} \cup \overline{av},$$

を取り,

$$N = S_1 \times S_1 \sqcup S_2 \times S_2 \sqcup S_3 \times S_3 \ \subset\ K \times K$$

と定義することによって求める $\chi(N) = -5$ である nonorientable compact connected 曲面 N が得られる. □

逆に nonorientable compact connected 曲面 M がグラフ K の積空間 $K \times K$ へ埋め込めると仮定する. K に与えられた triangulation $\mathcal{T}$ に対し

て, $K \times K$ の cell structure を

$$\tilde{\mathcal{T}} = \{\tau_1 \times \tau_2 \mid \tau_i \in \mathcal{T}, i = 1, 2\ \}.$$

によって与えておく. この時

(1) M は $K \times K$ の (cell structure について $\tilde{\mathcal{T}}$) subcomplex である,

(2) 任意の 2cell $\sigma = \tau_1 \times \tau_2 \in \tilde{\mathcal{T}}|_M$ に対して, circles $S_1(\sigma), S_2(\sigma) \subset K$:

$$\tau_1 \times S_2(\sigma) \cup S_1(\sigma) \times \tau_2 \subset M$$

が存在する,

に注意して次のことを示す:

補題 3.2. *nonorientable compact connected* 曲面 M が 2 つのグラフの積空間へ埋め込めるならば, その *Euler character* $\chi(M)$ は ≤ -4 である.

定理 3.5 は nonorientable compact connected 曲面の 2 つのグラフの積空間への埋め込みについてあったが, さらに, 多様体のグラフの積空間への埋め込みと一般の 1 次元 compact 距離空間の積空間への埋め込みとの関係について次のことがわかる：

定理 3.6. *If an n-dimensional manifold is embeddable into the product of n one-dimensional continua, then it can be embeddable into the product of n curves.*

証明は当然結構面倒なところがあるので興味のある人は論文 [Ko-Kr-Sp] を見てください.

これまでの結果を合わせると, compact 局面の 2 つの 1 次元 compact 距離空間の積空間への埋め込みの可能性については ‘ complete table’ ができたと言ってよいだろう.

これらの結果を見ていくと, 定理 3.4 の判定法は,1 次元コホモロジー群が充分に小さく, 最高次元のコホモロジー群が自明ではないというアンバランスを利用している. そうでない場合, 例えば次の問題はおもしろいと思う：

問題 3.2. *Does there exist a contractible n-dimensional continuum which cannot be embedded into the product of n one-dimensional compacta?*

In particular, can every n-dimensional AR be embeddable into the product of n one-dimensional compacta?

関連する結果としては, $\mathbb{R}^{2n}$ へ埋め込むことができない contractible n-dimensional continua の存在が知られている [R-S-S], [R-S].

また, 境界をもつ単体分割可能な n 次元 compact 多様体の埋め込みについて次の問題は肯定的な解を持つか？2 次元の場合は (ii) であり, 3 次元の場合も肯定的に解かれている [Zh].

問題 3.3. *Is every n-dimensional PL-manifold with boundary embeddable into the product of* $\underbrace{T\times\cdots T}_{n-1}\times I$*?*

ここでこれまでの結果と関連してデカルト積 (Cartesian product) から対称積 (symmetric product) へ話題を転換してみよう.

空間 X の n 次対称積 $SP^n(X)$ とは, n 次対称群 S_n の積空間 X^n への作用の軌道空間と定義する. すなわち積空間 X^n 上の同値関係:

$$(x_1,\cdots,x_n)\sim(y_1,\cdots,y_n)\iff$$

$$\sigma\in S_n,(y_1,\cdots,y_n)=(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n)}),\ \text{が存在する}$$

による商空間である.

μ を Menger curve とすると, $SP^{n+1}(\mu)$ は積空間 u^{n+1} の copy を含んでいるから, 定理 3.1 は:

‘任意の n 次元 compact 距離空間は $SP^{n+1}(\mu)$ へ埋め込むことができる’

と言い換えることができる. そこで Illanes-Nadler[I-N] は Borsuk の定理 3.2 をみて次の問題を提出した:

問題 3.4 (Question83-14). *Is there a one-dimensional continuum X, such that the 2-dimensional sphere S^2 can be embedded in $SP^2(X)$?*

もちろん対称積はデカルト積と比べると複雑な構造をもつ. たとえば, 定理 3.3 から S^3 はどんな 3 つの 1 次元連続体のデカルト積へ埋め込むことができないが, Bott[Bt] は $SP^3(S^1)=S^3$ を示している. 彼らは埋め込みへの自由度が増すと思ったのか? それとも否定的な解を期待したのか? わからない. しかし否定的に解ければ $n=2$ と $n=3$ での対称積の違いが明確になる, 肯定的に解ければ $n=2$ の場合でも (空間の埋め込み性について) 対称積とデカルト積の違いが明確にできるという結構な問題であった.

われわれは対称積 SP^2 について (空間上でなく) コホモロジー群をとると代数的に積構造をもつことを示して

定理 3.7. *Let X be a two-dimensional compactum. If the rank of $\check{H}^1(X)$ is ≤ 1, then X cannot be embedded into the symmetric product $SP^2(Z)$ of any one-dimensional compactum Z.*

よって対称積SP^2についてもデカルト積の場合と同様に2次元球面, 射影平面, Klein bottleはどんな1次元compact距離空間Zの対称積$SP^2(Z)$に埋め込むことはできないことがわかる. 証明で本質的なことは$H^2(SP^2(\bigvee S^1))$の構造を決定することである.

補題 3.3. *$SP^2(S^1)$ is homeomorphic to the Möbus band. Therefore $H^1(SP^2(S^1)) = \mathbb{Z}$ and $H^2(SP^2(S^1)) = 0$.*

Lemma 3.3はよく知られた事実であるが後のためにその構造の決定の仕方を解説しておく.

Proof. We may identify the 1-sphere S^1 with the quotient space $[0,1]/\{0,1\}$. The torus $T = S^1 \times S^1$ is obtained as the identification space $[0.1] \times [0,1]/\sim$, where $(0,t) \sim (1,t)$ and $(s,0) \sim (s,1)$. Then the symmetric product $SP^2(S^1)$ can be obtained as the identification space:

$$\Delta_1 = \{(s,t) \in [0,1] \times [0,1] \mid s \geq t\}/\sim,$$

$$(s,0) \sim (1,s), s \in [0,1] \text{ and } (0,0) \sim (1,0) \sim (1,0).$$

Therefore $SP^2(S^1)$ is the projective plane with a hole, that is, the Möbus band.

Next we shall specify a presentation of $H^1(SP^2(S^1))$. We shall use the following notation: Let $\varphi : [0,1] \times [0,1] \to SP^2(S^1)$ be the natural projection.

$$X_1 = \varphi(\{(s,t) \in [0,1]\times[0,1] \mid 1/3 \leq s \leq 2/3,\ t \leq s - 1/6 \text{ and } t \geq 1/6\}),$$

$$X_2 = \overline{SP^2(S^1) \setminus X_1} \text{ and } X_0 = X_1 \cap X_2.$$

Under this consideration we shall identify S^1 with the image $\varphi([0,1] \times \{0\}) = \varphi(\{1\} \times [0,1])$.

Then we consider the Mayer-Vietoris sequence of reduced cohomology groups of the pair (X_1, X_2):

$$0 = \tilde{H}^0(X_0;G) \to \tilde{H}^1(SP^2(S^1);G) \to \tilde{H}^1(X_1;G) \oplus \tilde{H}^1(X_2;G) \xrightarrow{i_1^* - i_2^*} \tilde{H}^1(X_0;G)$$

$$\to \tilde{H}^2(SP^2(S^1);G) \to \tilde{H}^2(X_1;G) \oplus \tilde{H}^2(X_2;G) = 0,$$

here $i_1 : X_0 \hookrightarrow X_1, i_2 : X_0 \hookrightarrow X_2$ are the suitable inclusion maps. Since the induced homomorphism $i_2^* : \tilde{H}^1(X_0;G) \to \tilde{H}^1(X_2;G)$ corresponds with the homomorohism $\varphi : G \oplus G \to G$ given by $\varphi(g_1, g_2) = 2g_1 + g_2$, the above sequence can be reduced to the following sequences:

$$0 \to \tilde{H}^1(SP^2(S^1);G) \to G \oplus G \xrightarrow{-\varphi} G \to \tilde{H}^2(SP^2(S^1);G) \to 0.$$

Therefore

$$\tilde{H}^1(SP^2(S^1);G) = Ker(-\varphi) \cong G$$
$$\tilde{H}^2(SP^2(S^1);G) = Coker(-\varphi) = 0.$$

In fact, by the inclusion-induced homomorphism,

$$H^1(SP^2(S^1);G) \cong H^1(S^1;G) \qquad \square$$

finite bouquet of 1-spheres $\bigvee_{i=1}^n S_i$ の 2 次元コホモロジー群を考える. Lemma 3.2 と同様に $\bigvee_{i=1}^n S_i$ を the quotient space $[0,n]/\{0,1,\cdots,n\}$ と同一視する. すなわち, $SP^2(\bigvee_{i=1}^n S_i)$ を idefication space of the lower triangle と見なす:

$$\Delta_n = \{(s,t) \in [0,n] \times [0,n] \mid s \geq t\}, \quad \text{and}$$

$$(s,0) \sim (s,1) \sim \cdots \sim (s,i) \ \text{ if } \ i \leq s \leq i+1, \ i = 0,1,\cdots,n-1,$$
$$(j+1,t) \sim \cdots \sim (n-1,t) \sim (n,t) \ \text{ if } \ j \leq t \leq j+1, \ j = 0,1,\cdots,n-1,$$
$$(s,i) \sim (i+1,s) \ \text{ if } \ i \leq s \leq i+1, \ i = 0,1,\cdots,n-1.$$

$\varphi : \Delta_n \to SP^2(\bigvee_{i=1}^n S_i)$, によって the identifaction map を表すことにする. 各々の pair $i,j = 0,1,\cdots,n-1, \ i \geq j$, について

$$T_{i,j} = \varphi([i,i+1] \times [j,j+1] \cap \Delta_n).$$

とすると, $T_{i,i} = SP^2(S_i)$ であり, $i \neq j$ ならば, $T_{i,j}$ は the torus $S_i \times S_j$ と位相同型である. この時次のことを示そう:

補題 3.4.

$$\bigoplus_{i>j} r_{i,j}^* : \bigoplus_{i>j} H^2(T_{i,j}) \cong H^2(\bigvee_{i=1}^n S_i)$$

Proof. We shall show by the induction on $n \geq 1$. Lemma 3.3 gives the case $n = 1$. We assume that for case of $n \leq k$, where $k \geq 1$, we obtained the isomorphism:

$$(h_{i,j}^*) : H^2(SP^2(\bigvee_{i=1}^{k} S_i); G) \cong \oplus_{i \neq j} H^2(T_{i,j}; G),$$

where $h_{i,j} : T_{i,j} \hookrightarrow SP^2(\bigvee_{i=1}^{k} S_i)$, $i \neq j$, are suitable inclusion maps.

We shall consider the case $n = k + 1$. Note that

$$SP^2(\bigvee_{i=1}^{k+1} S_i) = SP^2(\bigvee_{i=1}^{k} S_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{k} T_{k+1,j} \cup SP^2(S_{k+1})).$$

Then $\bigcup_{j=1}^{k} T_{k+1,j} = S_{k+1} \times (\bigvee_{j=1}^{k} S_j)$ and $(\bigcup_{j=1}^{k} T_{k+1,j}) \cap SP^2(S_{k+1}) = S_{k+1}$. Hence $H^2(\bigcup_{j=1}^{k} T_{k+1,j} \cup SP^2(S_{k+1}); G) = \bigoplus_{j=1}^{k} H^2(T_{k+1,j}; G)$. Let us consider the Mayer-Vietoris sequence of reduced cohomology groups of the pair $(SP^2(\bigvee_{i=1}^{k} S_i), \bigcup_{j=1}^{k} T_{k+1,j} \cup SP^2(S_{k+1}))$:

$$0 = \tilde{H}^0(\bigvee_{j=1}^{k} S_j; G) \to \tilde{H}^1(SP^2(\bigvee_{i=1}^{k+1} S_i); G) \to$$

$$\tilde{H}^1(SP^2(\bigvee_{i=1}^{k} S_i); G) \oplus \tilde{H}^1(\bigcup_{j=1}^{k} T_{k+1,j} \cup SP^2(S_{k+1}); G) \xrightarrow{u^*-v^*} \tilde{H}^1(\bigvee_{j=1}^{k} S_j; G) \to$$

$$\tilde{H}^2(SP^2(\bigvee_{i=1}^{k+1} S_i); G) \to \tilde{H}^2(SP^2(\bigvee_{i=1}^{k} S_i); G) \oplus \tilde{H}^2(\bigcup_{j=1}^{k} T_{k+1,j} \cup SP^2(S_{k+1}); G) \to 0,$$

here u, v are suitable inclusion maps. Then the homomorphism $u^* - v^*$ is clearly epimorphic. Hence

$$\tilde{H}^1(SP^2(\bigvee_{i=1}^{k+1} S_i); G) = Ker(u^* - v^*) \cong \bigoplus_{i \neq j} \tilde{H}^1(T_{i,j}; G)$$

and

$$\begin{aligned} \tilde{H}^2(SP^2(\bigvee_{i=1}^{k+1} S_i); G) &= \tilde{H}^2(SP^2(\bigvee_{i=1}^{k} S_i); G) \oplus \tilde{H}^2(\bigcup_{j=1}^{k} T_{k+1,j} \cup SP^2(S_{k+1}); G) \\ &= \bigoplus_{i \neq j} \tilde{H}^2(T_{i,j}; G) \end{aligned}$$

□

これらの結果の高次元版はまだ知られていないが, ちょっと試してみてもいいだろう. 同様な証明で次のことがわかる:

定理 3.8. n 次元球面 S^{2n} はどんな n 次元 *compact* 距離空間 X の対称積 $SP^2(X)$ へ埋め込むことができない.

一方, 次のタイプはまだわかっていない. この問題が肯定的に解ければ SP^2 と SP^3 の違いをさらに際だたせることができる.

問題 3.5. n 次元球面 S^{3n} は適当な n 次元 *compact* 距離空間 X の対称積 $SP^3(X)$ へ埋め込むことができるか?
特に S^{3n} は $SP^3(S^n)$ へ埋め込むことができるか?

最後に SP^2 についても対称積とデカルト積の埋め込みに関する性質が異なることに注意しておく:

定理 3.9. *The symmetric product* $SP^2(\bigvee_{i=1}^{3} S_i)$ *cannot be embedded into the Cartesian product of any two one-dimensional compacta.*

参考文献

[Bo] K. Borsuk, *Remarks on the Cartesian product of two* 1*-dimensional spaces*, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. **23**(1975), 971–973.

[Bt] R. Bott, *On the third symmetric product of* S^1, Fund. Math. **39**(1952), 264–268.

[Dy-Ko] J. Dydak and A. Koyama, *Compacta not embeddable into Cartesian products of curves*, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. (to appear).

[I-N] A. Illanes and S. B. Nadler, *checkcheckHyperspaces*, Marcek Dekker, 1999.

[Ko-Kr-Sp] A. Koyama, J. Krasinkiewicz and S. Spiez, *On embeddings of compacta into Cartesian products of curves*, preprint.

[Ku] W. Kuperberg, *On embeddings of manifolds into Cartesian products of compacta*, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. **26**(1978), 845–848.

[Na_1] J. Nagata, *Note on dimension theory for metric spaces*, Fund. Math. **45** (1958), 143–181.

[Na_2] ____, *Mordern dimension theory*, North-checkcheckHolland, Amsterdam, 1965.

[Po] R. Pol, *A* 2*-dimensional compactum in the product of two* 1*-dimensional compacta which does not contain any rectungle*, Topology Proc. **16**(1991), 133–135.

[R-S-S] D. Repovs, A. Skopenkov and E. V. Scchepin, *On uncountable collections of continua and their span*, Colloq. Math. **69**(1995), 289–296.

[R-S] _____, *On contractible* n*-dimensional compacta, non-embeddable into* $\mathbb{R}^{2n}$, preprint (1999).

[Zh] L. Zhongmou, *Every* 3*-manifold with boundary embeds into Troid* $\times$ *Troid* $\times I$, Proc. Amer. Math. Soc. **122**(1994), 575–579.